

附录

附录 1 分层交叉因子面板模型的基本假设

令 $\|A\| = [\text{tr}(A'A)]^{1/2}$ ，表示矩阵 A 的范数。分层交叉因子面板模型式 (4) ~ (5) 的基本假设如下。

假设 A：共同因子和分组交叉因子。

A1：共同因子满足， $E\|\mathbf{g}_t\|^4 < \infty$ ，且当 $T \rightarrow \infty$ 时， $T^{-1} \sum_{t=1}^T \mathbf{g}_t \mathbf{g}_t' \rightarrow \Sigma_g$ ， Σ_g 为 $r \times r$ 维正定矩阵。

A2：第二层交叉因子满足，对任意的 $s=1,2,\dots,\tilde{S}$ ， $d=1,2,\dots,D$ ， $E\|\mathbf{f}_t^s\|^4 < \infty$ ， $E\|\mathbf{h}_t^d\|^4 < \infty$ ；且当 $T \rightarrow \infty$ 时， $T^{-1} \sum_{t=1}^T \mathbf{f}_t^s \mathbf{f}_t^{s'} \rightarrow \Sigma_{f^s}$ ， $T^{-1} \sum_{t=1}^T \mathbf{h}_t^d \mathbf{h}_t^{d'} \rightarrow \Sigma_{h^d}$ ， Σ_{f^s} 、 Σ_{h^d} 分别为 $r_s \times r_s$ 、 $r_d \times r_d$ 维正定矩阵。

A3：对任意的 $s=1,2,\dots,\tilde{S}$ ， $d=1,2,\dots,D$ ，定义 $\mathbf{H}_t = [\mathbf{g}_t', \mathbf{f}_t^s, \mathbf{h}_t^d]'$ ， $T^{-1} \sum_{t=1}^T \mathbf{H}_t \mathbf{H}_t' \xrightarrow{P} \Sigma_H$ ，则 Σ_H 为正定矩阵，且 $\text{rank}(\Sigma_H) = r + r_s + r_d$ 。

假设 B：因子载荷。

B1：共同因子载荷 $\boldsymbol{\gamma} = [\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N]'$ 满足， $E\|\boldsymbol{\gamma}_i\|^4 < \infty$ ，且当 $N \rightarrow \infty$ 时， $\|N^{-1} \boldsymbol{\gamma} \boldsymbol{\gamma}' - \Sigma_\gamma\| \rightarrow 0$ ， Σ_γ 为 $r \times r$ 维正定矩阵。

B2：对任意的 $s=1,2,\dots,\tilde{S}$ ， $d=1,2,\dots,D$ ，组内交叉因子载荷 $\boldsymbol{\lambda}^s = [\lambda_1^s \ \lambda_2^s \ \dots \ \lambda_{N_s}^s]'$ 、 $\boldsymbol{\delta}^d = [\delta_1^d \ \delta_2^d \ \dots \ \delta_{N_d}^d]'$ 满足， $E\|(\boldsymbol{\lambda}_i^s)\|^4 < \infty$ ， $E\|(\boldsymbol{\delta}_i^d)\|^4 < \infty$ 。同时，当 $N_s \rightarrow \infty$ 、 $N_d \rightarrow \infty$ 时， $\|N_s^{-1} \boldsymbol{\lambda}^s \boldsymbol{\lambda}^{s'} - \Sigma_{\lambda^s}\| \rightarrow 0$ ， $\|N_d^{-1} \boldsymbol{\delta}^d \boldsymbol{\delta}^{d'} - \Sigma_{\delta^d}\| \rightarrow 0$ 。 Σ_{λ^s} 、 Σ_{δ^d} 分别为 $r_s \times r_s$ 、 $r_d \times r_d$ 维正定矩阵。

B3：令 $\Delta_{i \in (s,d)} = [\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\lambda}^s, \boldsymbol{\delta}^d]_{i \in (s,d)}$ ，则 $\Delta_{i \in (s,d)}$ 是列满秩的。 $\Delta_{i \in (s,d)}$ 表示同时属于属性 s 和属性 d 的个体的各因子载荷组成的矩阵。

假设 C：随机扰动项。

C1：存在一个正的常数 $C < \infty$ ，使得对所有的 i 和 t ，有 $E[u_{it}] = 0$ ， $E[u_{it}^8] < C$ 。

C2：对任意的 i, t, s, d ， u_{it} 与解释变量 $\mathbf{X}_{it}$ ，因子 $\mathbf{g}_t$ 、 $\mathbf{f}_t^s$ 、 $\mathbf{h}_t^d$ ，及载荷 $\boldsymbol{\gamma}_i$ 、 $\boldsymbol{\lambda}_i^s$ 、 $\boldsymbol{\delta}_i^d$ 均不相关。

C3：扰动项 u_{it} 可以存在异方差、自相关或弱截面相关。

假设 D：可观测变量 $\mathbf{X}_{it}$ 。

D1： $E\|\mathbf{X}_{it}\|^4 \leq M < \infty$ 。 M 为一正的常数。

D2：对任意的 $s=1,2,\dots,\tilde{S}$ ， $d=1,2,\dots,D$ ，定义矩阵 $\mathbf{E} = \mathbf{X}_{it}^{sd'} \mathbf{M}_{g,f,h} \mathbf{X}_{it}^{sd}$ ，则 $\mathbf{E}$ 为正定矩阵。其中，

$$\mathbf{M}_{g,f,h} = \mathbf{I}_T - \mathbf{G}_{gfh} (\mathbf{G}_{gfh}' \mathbf{G}_{gfh})^{-1} \mathbf{G}_{gfh}'，\quad \mathbf{G}_{gfh} = (\mathbf{g}_t, \mathbf{f}_t^s, \mathbf{h}_t^d)。$$

$$\text{D3} : \quad \text{令} \quad \mathbf{A} = \left\{ (\mathbf{g}, \mathbf{f}^s, \mathbf{h}^d) : \frac{\mathbf{g} \mathbf{g}'}{T} = \mathbf{I}_r, \frac{\mathbf{f}^s \mathbf{f}^{s'}}{T} = \mathbf{I}_{r_s}, \frac{\mathbf{h}^d \mathbf{h}^{d'}}{T} = \mathbf{I}_{r_d} \right\}，\quad \text{对任意} \quad s=1,2,\dots,\tilde{S}，$$

$d=1,2,\dots,D$ ， $\inf_{\mathbf{g}, \mathbf{f}^s, \mathbf{h}^d \in \mathbf{A}} \left[\frac{1}{N_{sd}} \sum_{i \in (s,d)} E_i(\mathbf{g}, \mathbf{f}^s, \mathbf{h}^d) \right]$ 为正定矩阵。其中， $i \in (s,d)$ 表示同时属于属性 s 和属性 d 的个体， $\mathbf{g} = (\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_T)$ ， $\mathbf{f}^s = (\mathbf{f}_1^s, \mathbf{f}_2^s, \dots, \mathbf{f}_T^s)$ ， $\mathbf{h}^d = (\mathbf{h}_1^d, \mathbf{h}_2^d, \dots, \mathbf{h}_T^d)$ 。

$$E_i(\mathbf{g}, \mathbf{f}^s, \mathbf{h}^d) = \mathbf{B}_i - \mathbf{C}_i' \mathbf{A}_i^{-1} \mathbf{C}_i \quad 。 \quad \mathbf{A}_i = \frac{1}{T} \mathbf{X}_i' \mathbf{M}_{g,f,h} \mathbf{X}_i, \quad \mathbf{C}_i = (\mathbf{C}_{\gamma_i}, \mathbf{C}_{\lambda_i^s}, \mathbf{C}_{\delta_i^d}), \quad \mathbf{B}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_{\gamma_i} & \mathbf{B}_{\gamma_i \lambda_i^s} & \mathbf{B}_{\gamma_i \delta_i^d} \\ \mathbf{B}_{\gamma_i \lambda_i^s}' & \mathbf{B}_{\lambda_i^s} & \mathbf{B}_{\lambda_i^s \delta_i^d} \\ \mathbf{B}_{\gamma_i \delta_i^d}' & \mathbf{B}_{\lambda_i^s \delta_i^d}' & \mathbf{B}_{\delta_i^d} \end{pmatrix}。$$

$$\mathbf{B}_{\gamma_i} = (\boldsymbol{\gamma}_i \boldsymbol{\gamma}_i') \otimes \mathbf{I}_T, \quad \mathbf{B}_{\lambda_i^s} = (\boldsymbol{\lambda}_i^s \boldsymbol{\lambda}_i^{s'}) \otimes \mathbf{I}_T, \quad \mathbf{B}_{\delta_i^d} = (\boldsymbol{\delta}_i^d \boldsymbol{\delta}_i^{d'}) \otimes \mathbf{I}_T, \quad \mathbf{B}_{\gamma_i \lambda_i^s} = (\boldsymbol{\gamma}_i \boldsymbol{\lambda}_i^{s'}) \otimes \mathbf{I}_T, \quad \mathbf{B}_{\gamma_i \delta_i^d} = (\boldsymbol{\gamma}_i \boldsymbol{\delta}_i^{d'}) \otimes \mathbf{I}_T,$$

$$\mathbf{B}_{\lambda_i^s \delta_i^d} = (\boldsymbol{\lambda}_i^s \boldsymbol{\delta}_i^{d'}) \otimes \mathbf{I}_T, \quad \mathbf{C}_{\gamma_i} = \frac{1}{\sqrt{T}} \boldsymbol{\gamma}_i' \otimes \mathbf{X}_i' \mathbf{M}_{g,f,h}, \quad \mathbf{C}_{\lambda_i^s} = \frac{1}{\sqrt{T}} \boldsymbol{\lambda}_i^{s'} \otimes \mathbf{X}_i' \mathbf{M}_{g,f,h}, \quad \mathbf{C}_{\delta_i^d} = \frac{1}{\sqrt{T}} \boldsymbol{\delta}_i^{d'} \otimes \mathbf{X}_i' \mathbf{M}_{g,f,h},$$

$$\mathbf{X}_i = (\mathbf{X}_{i1}', \mathbf{X}_{i2}', \dots, \mathbf{X}_{iT}')'。$$

附录 2 仿真结果

附表 1 参数估计量的有限样本性质: $x_{it} = c_i + \tau_i x_{it-1} + u_{it}$

		统计量	N=50 T=20	N=50 T=50	N=100 T=50	N=100 T=100	N=200 T=100	N=200 T=200
FE	$\hat{\beta}_1$	Bias	0.0027	0.0015	0.0005	0.0007	-0.0010	0.0008
		RMSE	0.0381	0.0257	0.0224	0.0178	0.0152	0.0112
	$\hat{\beta}_2$	Bias	0.3554	0.3576	0.3574	0.3580	0.3581	0.3577
		RMSE	0.3558	0.3577	0.3575	0.3581	0.3581	0.3578
G1	$\hat{\beta}_1$	Bias	0.0013	0.0005	0.0008	0.0008	-0.0009	0.0003
		RMSE	0.0382	0.0239	0.0175	0.0142	0.0093	0.0078
	$\hat{\beta}_2$	Bias	0.2181	0.1542	0.1450	0.1428	0.1429	0.1428
		RMSE	0.2396	0.1612	0.1463	0.1436	0.1435	0.1431
GF3	$\hat{\beta}_1$	Bias	0.0006	0.0016	0.0006	0.0009	-0.0009	0.0001
		RMSE	0.0454	0.0272	0.0181	0.0147	0.0096	0.0078
	$\hat{\beta}_2$	Bias	0.1772	0.1159	0.1011	0.0823	0.0620	0.0532
		RMSE	0.2046	0.1215	0.1045	0.0851	0.0638	0.0547
CPCA	$\hat{\beta}_1$	Bias	0.0003	0.0004	0.0013	0.0011	-0.0012	0.0002
		RMSE	0.0438	0.0266	0.0181	0.0147	0.0097	0.0078
	$\hat{\beta}_2$	Bias	0.1165	0.0546	0.0474	0.0441	0.0433	0.0471
		RMSE	0.1645	0.0683	0.0534	0.0484	0.0470	0.0493
GPCA	$\hat{\beta}_1$	Bias	0.0004	0.0008	0.0006	0.0007	-0.0009	0.0002
		RMSE	0.0424	0.0265	0.0179	0.0144	0.0092	0.0076
	$\hat{\beta}_2$	Bias	0.1674	0.0899	0.0642	0.0419	0.0228	0.0149
		RMSE	0.2039	0.0998	0.0697	0.0455	0.0257	0.0169

注: x_{it} 的数据生成过程为变系数 AR(1) 形式, 即 $x_{it} = c_i + \tau_i x_{it-1} + u_{it}$, 其中, $c_i \sim U(0,10)$, $\tau_i \sim U(0.2,0.8)$, $u_{it} \sim IIDN(0,1)$ 。共同因子为 AR 因子, 扰动项为白噪声形式, 其他变量和参数的数据生成过程不变(下同)。

附表 2 参数估计量的有限样本性质: $corr(e_{1t}^s, e_{2t}^d) = 0.5$

		统计量	N=50 T=20	N=50 T=50	N=100 T=50	N=100 T=100	N=200 T=100	N=200 T=200
FE	$\hat{\beta}_1$	Bias	-0.0018	0.0008	0.0002	0.0003	-0.0006	0.0000
		RMSE	0.0257	0.0147	0.0119	0.0078	0.0053	0.0038
	$\hat{\beta}_2$	Bias	0.3553	0.3545	0.3542	0.3544	0.3548	0.3548
		RMSE	0.3557	0.3547	0.3543	0.3545	0.3548	0.3548
G1	$\hat{\beta}_1$	Bias	-0.0013	0.0007	0.0001	0.0001	-0.0006	0.0000
		RMSE	0.0264	0.0145	0.0114	0.0073	0.0051	0.0036
	$\hat{\beta}_2$	Bias	0.2697	0.2146	0.2034	0.2026	0.2016	0.2004
		RMSE	0.2801	0.2176	0.2044	0.2031	0.2020	0.2006
GF3	$\hat{\beta}_1$	Bias	-0.0016	0.0004	0.0000	0.0001	-0.0006	0.0000
		RMSE	0.0305	0.0161	0.0116	0.0077	0.0051	0.0036
	$\hat{\beta}_2$	Bias	0.2088	0.1375	0.1004	0.0717	0.0551	0.0544
		RMSE	0.2326	0.1469	0.1093	0.0802	0.0615	0.0600
CPCA	$\hat{\beta}_1$	Bias	-0.0017	0.0004	0.0000	0.0002	-0.0007	0.0000
		RMSE	0.0288	0.0152	0.0113	0.0075	0.0050	0.0036
	$\hat{\beta}_2$	Bias	0.1497	0.0681	0.0542	0.0460	0.0449	0.0410
		RMSE	0.1896	0.0829	0.0591	0.0484	0.0464	0.0414
GPCA	$\hat{\beta}_1$	Bias	-0.0016	0.0004	0.0001	0.0002	-0.0006	0.0000
		RMSE	0.0295	0.0154	0.0115	0.0075	0.0050	0.0036
	$\hat{\beta}_2$	Bias	0.2000	0.0865	0.0441	0.0266	0.0199	0.0153
		RMSE	0.2295	0.1043	0.0501	0.0302	0.0216	0.0164

注: 共同因子为 AR 因子, 扰动项为白噪声形式, 其他变量和参数的数据生成过程不变(下同)。

附表 3 GPCA 全部拟合因子与真实因子的典型相关系数

	统计量	N=50 T=20	N=50 T=50	N=100 T=50	N=100 T=100	N=200 T=100	N=200 T=200
$x_{1it} = c_i + \tau_i x_{1it-1} + u_{1it}$	均值	0.9502	0.9837	0.9942	0.9946	0.9975	0.9976
	标准差	0.0740	0.0327	0.0018	0.0011	0.0004	0.0003
$corr(e_{1t}^s, e_{2t}^d) = 0.5$	均值	0.9390	0.9808	0.9940	0.9942	0.9972	0.9972
	标准差	0.0771	0.0328	0.0018	0.0011	0.0005	0.0003

附表 4 GPCA 层内拟合因子与真实因子的相关系数

	统计量	$(g_t, \hat{g}_t)$	$(f_t, \hat{f}_t)$	$(h_t, \hat{h}_t)$
$x_{1it} = c_i + \tau_i x_{1it-1} + u_{1it}$	均值	0.8330	0.8679	0.9434
	标准差	0.1117	0.0234	0.0100
$corr(e_{1t}^s, e_{2t}^d) = 0.5$	均值	0.8998	0.9591	0.9594
	标准差	0.0166	0.0068	0.0067